EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES (2h)

I θ désigne un nombre réel, appartenant à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. A tout élément n de N^* (ensemble des entiers $\geqslant 1$) on associe les nombres :

$$u_n(\theta) = \left[\sin\left(\theta + \frac{\theta}{n}\right)\right]^n , \quad v_n(\theta) = (\sin\theta)^n , \quad w_n(\theta) = \frac{u_n(\theta)}{v_n(\theta)} .$$

1°/ Montrer que la suite $(w_n(\theta))_{n\in N^*}$ converge et expliciter sa limite, désignée dans ce qui suit par $\ell(\theta)$.

2°/ Montrer que l'application

$$x \mapsto \frac{1}{x} \operatorname{Log} \frac{\sin(\theta + x)}{\sin\theta}$$

(Log désigne le logarithme népérien) de $]0, \pi - \theta[$ dans $\mathbb{R}$ est strictement décroissante. En déduire que la suite $(w_n(\theta))_{n\in N^*}$ est strictement croissante.

3°/ Montrer que la série :

$$u_1(\theta) + \ldots + u_n(\theta) + \ldots$$

est convergente. On désignera sa somme par $S(\theta)$.

4°/ Montrer que, quels que soient $n \in N^*$ et $k \in N^*$, on a

$$u_n(\theta)\, v_k(\theta) < u_{n+k}(\theta) < \ell(\theta)\, v_{n+k}(\theta) .$$

5°/ Pour tout $n \in N^*$, on pose

$$S_n(\theta) = u_1(\theta) + \ldots + u_n(\theta) ,$$

$$R_n(\theta) = S(\theta) - S_n(\theta) ,$$

$$A_n(\theta) = \frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}\, u_n(\theta) \text{ et } B_n(\theta) = \ell(\theta)\, \frac{(\sin\theta)^{n+1}}{1-\sin\theta} .$$

Montrer que l'on a $A_n(\theta) < R_n(\theta) < B_n(\theta)$.

II 1°/ On désigne par θ_1 la mesure en radians d'un angle de 21 grades, prise dans $]0, \frac{\pi}{2}[$. Calculer, avec toute la précision permise par l'emploi des tables, $A_6(\theta_1)$, $B_6(\theta_1)$ et $S_6(\theta_1)$.

En déduire un encadrement de $S(\theta_1)$.

2°/ On désigne par θ_2 la mesure en radians d'un angle de 72 grades, prise dans $]0, \frac{\pi}{2}[$. Calculer, à 10^{-2} près, $A_9(\theta_2)$, $B_9(\theta_2)$ et $S_9(\theta_2)$.

En déduire un encadrement de $S(\theta_2)$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail